Des maths dans GTA Vice City ?!

Laurent VALADE

2 juin 2015

Table des matières

1 Introduction

Ce document détaille les calculs relatifs à l'article « Des maths dans GTA Vice City ?! » sur mon blogue Au fil de la Physique.

Les seules données nécessaires aux calculs montrés l'article sont les gains aux premiers niveaux, soit pour les douze premiers :

— 1e niveau : 50 $
— 2e niveau : 200 $
— 3e niveau : 450 $
— 4e niveau : 800 $
— 5e niveau : 1250 $
— 6e niveau : 1800 $
— 7e niveau : 2450 $
— 8e niveau : 3200 $
— 9e niveau : 4050 $
— 10e niveau : 5000 $
— 11e niveau : 6050 $
— 12e niveau : 7200 $

2 Combien gagnerai-je au niveau n ?

On note g_n le gain au niveau n, et Δ_n l'incrément de gain entre chaque niveau, ainsi :

$$\Delta_n = g_{n+1} - g_n \quad \Leftrightarrow \quad g_{n+1} = g_n + \Delta_n.$$

Avec les gains des douze premiers niveaux, on peut calculer les incréments Δ_1 à Δ_{11} :

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= 150\,\$ \\
\Delta_2 &= 250\,\$ \\
\Delta_3 &= 350\,\$ \\
\Delta_4 &= 450\,\$ \\
\Delta_5 &= 550\,\$ \\
\Delta_6 &= 650\,\$ \\
\Delta_7 &= 750\,\$ \\
\Delta_8 &= 850\,\$ \\
\Delta_9 &= 950\,\$ \\
\Delta_{10} &= 1050\,\$ \\
\Delta_{11} &= 1150\,\$.
\end{aligned}$$

On remarque que la dépendance de Δ_n en fonction de n est :

$$\Delta_n = n \cdot 100\,\$ + 50\,\$.$$

Dans la suite, on fera les calculs dans le cas général, pour ce faire on défini A et B tels que :

$$\Delta_n = n \cdot A + B.$$

Ainsi, les gains à chaque niveau sont calculés grâce à la suite définie par récurrence suivante :

$$\begin{cases}
g_0 = 0\,\$ \\
g_{n+1} = g_n + n \cdot A + B \\
A = 100\,\$ \\
B = 50\,\$.
\end{cases}$$

Cette expression récurrente n'est pas pratique pour les calculs, établissons alors son expression « directe » :

$$\begin{aligned}
g_{n+1} &= g_n + n \cdot A + B \\
&= g_{n-1} + (n-1)\,A + B + n \cdot A + B \\
&= g_{n-1} + [n + (n-1)]\,A + 2 \cdot B \\
&= g_{n-2} + [n + (n-1) + (n-2)]\,A + 3 \cdot B \\
&\vdots \\
&= g_{n-n} + [n + (n-1) + \cdots + (n-n)]\,A + (n+1)\,B \\
&= g_0 + (n+1)\,B + A \sum_{k=0}^{n} k \\
&= g_0 + (n+1)\,B + A \frac{(n+1)\,n}{2}.
\end{aligned}$$

Soit finalement

$$g_{n+1} = g_0 + (n+1)\left(\frac{n}{2}A + B\right),$$

et avec $A = 100\,\$$ et $B = 50\,\$$:

$$\begin{aligned}
g_{n+1} &= g_0 + (n+1)\left(\frac{n}{2}A + B\right) \\
&= 0\,\$ + (n+1)\left(\frac{n}{2}100\,\$ + 50\,\$\right) \\
&= (n+1)\,(n \cdot 50\,\$ + 50\,\$) \\
&= (n+1)^2\,50\,\$.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi la formule finale donnée dans l'article

$$g_n = n^2 \cdot 50\,\$.$$

3 Combien aurai-je gagné après avoir enchaîné 100 niveaux ?

On fait le calcul dans le cas général où l'on enchaîne N niveaux. On note G_N le gain obtenu après avoir enchaîné N niveaux, il est donné par la somme des gains g_n des N premiers termes, ainsi :

$$\begin{aligned}
G_N &= \sum_{n=1}^{N} g_n \\
&= \sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{n-1}{2}A + B\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} n^2\frac{A}{2} - n\frac{A}{2} + n\cdot B \\
&= \frac{A}{2}\sum_{n=1}^{N} n^2 - \frac{A}{2}\sum_{n=1}^{N} n + B\sum_{n=1}^{N} n.
\end{aligned}$$

Avec les formules de la somme des N premiers entiers et carrés d'entiers

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} n &= \frac{(N+1)\,N}{2} \\
\sum_{n=1}^{N} n^2 &= \frac{(2N+1)\,(N+1)\,N}{6},
\end{aligned}$$

on obtient une expression simple pour G_N :

$$\begin{aligned}
G_N &= \frac{A}{2}\frac{(2N+1)\,(N+1)\,N}{6} - \frac{A}{2}\frac{(N+1)\,N}{2} + B\frac{(N+1)\,N}{2} \\
&= \frac{(N+1)\,N}{2}\frac{2N+1}{6}A - \frac{(N+1)\,N}{2}\frac{A}{2} + \frac{(N+1)\,N}{2}B \\
&= \frac{(N+1)\,N}{2}\left[\frac{2N+1}{6}A - \frac{A}{2} + B\right] \\
&= \frac{(N+1)\,N}{2}\left[N\frac{A}{3} + \frac{A}{6} - \frac{A}{2} + B\right] \\
&= \frac{(N+1)\,N}{2}\left[N\frac{A}{3} - \frac{A}{3} + B\right] \\
&= \frac{(N+1)\,N}{2}\left[(N-1)\,\frac{A}{3} + B\right].
\end{aligned}$$

Soit, avec $A = 100\,\$$ et $B = 50\,\$$:

$$\begin{aligned}
G_N &= \frac{(N+1)\,N}{2}\left[(N-1)\,\frac{100\,\$}{3} + 50\,\$\right] \\
&= \frac{(N+1)\,N}{2}\left[\frac{N}{3}100\,\$ - \frac{100\,\$}{3} + 50\,\$\right] \\
&= \frac{(N+1)\,N}{6}\left[N100\,\$ - 100\,\$ + 150\,\$\right] \\
&= \frac{(N+1)\,N}{6}\left[N100\,\$ + 50\,\$\right] \\
&= \frac{(N+1)\,N}{6}\frac{1}{2}\left[2N100\,\$ + 100\,\$\right] \\
&= \frac{(2N+1)\,(N+1)\,N}{6}\frac{100\,\$}{2}.
\end{aligned}$$

On obtient donc la formule donnée dans l'article :

$$G_N = \frac{(2N+1)\,(N+1)\,N}{6}50\,\$.$$

4 Combien dois-je enchaîner de niveaux pour gagner un milliard de dollars ?

On peut réécrire l'expression du gain G_N obtenu après avoir enchaîné N niveaux comme :

$$\begin{aligned} G_N &= \frac{(2N+1)(N+1)N}{6} 50\,\$ \\ &= \left(\frac{N^3}{3}+\frac{N^2}{2}+\frac{N}{6}\right)B. \end{aligned}$$

On cherche ici à déterminer N pour un gain G_N donné, il faut alors résoudre le polynôme d'ordre trois suivant

$$\begin{aligned} \frac{N^3}{3}+\frac{N^2}{2}+\frac{N}{6}-\frac{G_N}{B} &=0 \\ 2N^3+3N^2+N-6\frac{G_N}{B} &=0. \end{aligned}$$

La méthode de Cardan permet de résoudre une telle équation, mais puisqu'ici, on cherche une seule solution réelle (on suppose qu'il y en a une seule, et on le vérifiera *a posteriori*), on utilisera la « méthode trigonométrique » que j'ai détaillé dans [Valade 15].

On commence par mettre ce polynôme sous la forme d'Euler, c'est-à-dire sous la forme suivante :

$$M^3+pM+q=0,$$

pour cela, il faut « se débarasser » du monôme d'ordre deux. Pour ce faire, posons le changement de variable suivant

$$N=M-\lambda,$$

où l'introduction du paramètre libre λ nous permettra ensuite en fixant sa valeur d'annuler le coefficient du monôme de degré deux. Introduisons ce changement de variable dans le polynôme sur N :

$$\begin{aligned} 2N^3+3N^2+N-6\frac{G_N}{B} &= 0 \\ 2(M-\lambda)^3+3(M-\lambda)^2+(M-\lambda)-6\frac{G_N}{B} &= 0 \\ 2M^3-6M^2\lambda+6M\lambda^2-2\lambda^3+3M^2-6M\lambda+3\lambda^2+M-\lambda-6\frac{G_N}{B} &= 0 \\ 2M^3+(-6\lambda+3)M^2+\left(6\lambda^2-6\lambda+1\right)M-2\lambda^3+3\lambda^2-\lambda-6\frac{G_N}{B} &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour annuler le coefficient du monôme d'ordre deux, on fixe λ tel que :

$$-6\lambda+3=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{1}{2},$$

ainsi

$$N=M-\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad M=N+\frac{1}{2},$$

et le polynôme sur M devient alors

$$\begin{aligned} 2M^3+\left(\frac{6}{4}-\frac{6}{2}+1\right)M-\frac{2}{8}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-6\frac{G_N}{B} &= 0 \\ 2M^3+\frac{6-12+4}{4}M-\frac{2-6+4}{8}-6\frac{G_N}{B} &= 0 \\ 2M^3-\frac{1}{2}M-6\frac{G_N}{B} &= 0 \\ M^3-\frac{1}{4}M-3\frac{G_N}{B} &= 0. \end{aligned}$$

Les racines d'un polynôme d'ordre trois peuvent être réelles ou complexes et deux ou trois d'entre elles peuvent être confondues, afin de savoir dans quel cas nous somme, calculons

$$\delta=q^2+\frac{3p^3}{27},$$

qui vaut dans notre cas

$$\delta=\left(-3\frac{G_N}{B}\right)^2+\frac{3}{27}\left(\frac{1}{4}\right)^3=9\frac{G_N^2}{B^2}+\frac{3}{1728}>0.$$

Le fait que δ soit strictement positif implique que le polynômes sur M et celui sur N possèdent trois racines distinctes, l'une d'elles est réelle et les deux autres sont complexes conjuguées. Puisque nous cherchons une solution réelle (nous cherchons un nombre de niveaux !), nous allons utiliser la méthode trigonométrique pour la calculer. Pour cela, nous allons effectuer un nouveau changement de variable afin de mettre le polynôme sur M sous la forme suivante

$$4K^3-3K+A=0,$$

on impose que K soit propotionnel à M et on note α la constante de proportionnalité

$$K=\alpha M,$$

ainsi :

$$\begin{aligned} 4K^3-3K+A &= 0 \\ 4\alpha^3M^3-3\alpha M+A &= 0 \\ M^3-\frac{3}{4\alpha^2}M+\frac{A}{4\alpha^3} &= 0. \end{aligned}$$

Par identification (la famille $\left\{1,\ M,\ M^3\right\}$ étant libre), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{3}{\alpha^2} = 1 \quad&\Rightarrow\quad \alpha=\sqrt{3} \\ \frac{A}{4\alpha^3} = -3\frac{G_N}{B} \quad&\Rightarrow\quad A=-12\cdot 3\cdot\sqrt{3}\frac{G_N}{B}=-36\sqrt{3}\frac{G_N}{B}, \end{aligned}$$

et le polynôme sur K s'écrit

$$4K^3-3K-36\sqrt{3}\frac{G_N}{B}=0, \quad K=\sqrt{3}M.$$

C'est ici qu'intervient la trigonométrie (hyperbolique). Avant cela, on peut se convaincre que pour toute valeur non-nulle et raisonable du gain cumulé G_N, on a :

$$36\sqrt{3}\frac{G_N}{B} = 36\sqrt{3}\frac{G_N}{50\,\$} > 1.$$

En effet, cela impose que

$$G_N > \frac{50\,\$}{36\sqrt{3}} \approx 0{,}8\,\$,$$

or, le gain cumulé non-nul minimal est de 50 \$ (lorsque l'on s'arrête arpès avoir terminé le premier niveau), cette condition est donc tout le temps vérifiée dans le jeu.

Sans transition, développons le cosinus hyperbolique élevé au cube :

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}^3\theta &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\theta}+\mathrm{e}^{-\theta}}{2}\right)^3\\ &= \frac{\mathrm{e}^{3\theta}+3\mathrm{e}^{2\theta}\mathrm{e}^{-\theta}+3\mathrm{e}^{\theta}\mathrm{e}^{-2\theta}+\mathrm{e}^{-3\theta}}{8}\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{e}^{3\theta}+\mathrm{e}^{-3\theta}}{2}+3\frac{\mathrm{e}^{\theta}+\mathrm{e}^{-\theta}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\operatorname{ch}(3\theta)+3\operatorname{ch}\theta\right),\end{aligned}$$

ainsi

$$4\operatorname{ch}^3\theta - 3\operatorname{ch}\theta = \operatorname{ch}(3\theta).$$

On remarque que cette expression possède une structure similaire à celle du polynôme en K :

$$4K^3 - 3K = 36\sqrt{3}\frac{G_N}{B}.$$

Puisque l'on a

$$36\sqrt{3}\frac{G_N}{B} > 1,$$

on peut écrire K sous la forme suivante :

$$K = \operatorname{ch}\theta$$

et ainsi

$$\begin{aligned}36\sqrt{3}\frac{G_N}{B} &= 4K^3 - 3K\\ &= 4\operatorname{ch}^3\theta - 3\operatorname{ch}\theta\\ &= \operatorname{ch}(3\theta).\end{aligned}$$

On a donc une expression pour θ :

$$\theta = \frac{1}{3}\operatorname{argch}\left(36\sqrt{3}\frac{G_N}{B}\right),$$

puis en prenant le cosinus hyperbolique, on obtient l'expression de K

$$\operatorname{ch}\theta = \operatorname{ch}\left[\frac{1}{3}\operatorname{argch}\left(36\sqrt{3}\frac{G_N}{B}\right)\right] = K,$$

puis on revient à M avec $K = \sqrt{3}M$:

$$M = \frac{K}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ch}\left[\frac{1}{3}\operatorname{argch}\left(36\sqrt{3}\frac{G_N}{B}\right)\right].$$

Enfin, on revient à la variable originale N (le nombre de niveaux enchaînés) :

$$N = M - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ch}\left[\frac{1}{3}\operatorname{argch}\left(36\sqrt{3}\frac{G_N}{B}\right)\right] - \frac{1}{2}.$$

Il reste une dernière subtilité, puisque l'on cherche un nombre de niveaux, il faut que N soit entier, et puisqu'on le cherche en fonction d'un certain montant que l'on veut gagner, il faut en prendre la partie entière par excès, notée $\lceil\cdot\rceil$. On obtient donc finalement la dernière formule donnée dans l'article :

$$N = \left\lceil\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ch}\left[\frac{1}{3}\operatorname{argch}\left(36\sqrt{3}\frac{G_N}{B}\right)\right] - \frac{1}{2}\right\rceil.$$

Références

[Valade 15] Laurent Valade. *Racines d'un polynôme d'ordre trois*, Avril 2015. Citée une fois page 4.